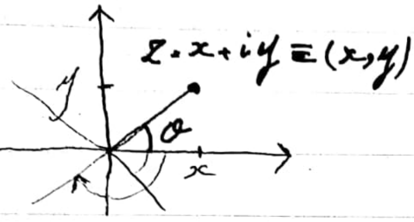
DATE / / SUBJECT:

ریاضی مهندسی اروین کرویت سیگ جلد دوم

امتحان میانترم از اعداد مختلط ، تابع ، نگاشت



$Z = x+iy \quad x,y \in R \quad i^2 = -1$

$\bar{Z} = x-iy$

$|Z| = \sqrt{Z\bar{Z}} = \sqrt{x^2+y^2}$

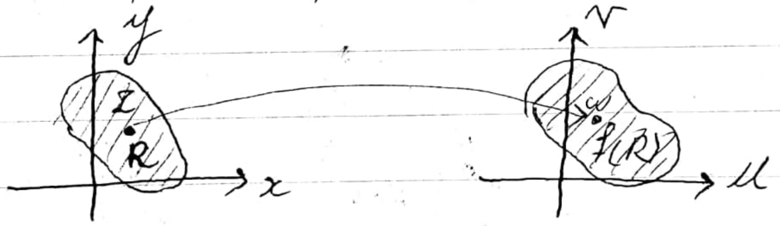
$Z = re^{i\theta} \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad -\pi < \theta \leq \pi \quad Arg(Z) = \theta$

$arg(Z) = \theta + 2K\pi$ مثال: $Z^2 + Z + 1 = 0 \quad \Delta = 1-4 = -3 = 3i^2$

$Z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

تابع مختلط:

$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad Z \longrightarrow f(Z) = w$



$f(R)$ = تصویر R تحت نگاشت f

مثال: $f_1(Z) = Z^3 + iZ - 4i \quad f_2(Z) = \sqrt{Z-i} \quad f_3(Z) = \frac{Z+1}{Z^2+9} \Rightarrow Z = \pm 3i$

$f_4(Z) = \frac{Z^2-1}{|Z|+4} \rightarrow$ مخرج ریشه ندارد پس دامنه تعریف می‌شود کل اعداد

$w = f(Z) \quad Z = x+iy \quad f(Z) = f(x+iy) = \cdots = u(x,y) + iv(x,y)$

$u(x,y) = Re(f) \quad v(x,y) = Im(f)$

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

مثال: $f(Z)=Z^2-i+3$ $\quad Re(f)=?$ $\quad Im(f)=?$

$f(x+iy)=(x+iy)^2-i+3=x^2-y^2+2xyi-i+3=(x^2-y^2+3)+i(2xy-1)$

$u=x^2-y^2+3 \quad v=2xy-1$

مثال: $f(Z)=\frac{Z+3}{Z-i}$ $\quad Re(f)=?$

$f(x+iy)=\frac{x+iy+3}{x+iy-i}=$ ~~(struck out)~~

$=\frac{(x+3)+iy}{x+(y-1)i}\cdot\frac{x-(y-1)i}{x-(y-1)i}=\frac{[x(x+3)+y(y-1)]+[xy-(y-1)(x+3)]i}{x^2+(y-1)^2}$

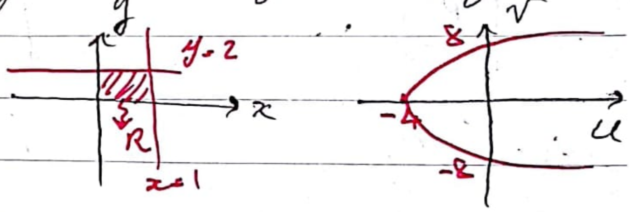
$Re(f)$

مثال: تصویر خط $y=2$ را تحت نگاشت $f(Z)=Z^2$ تعیین کنید

$f(x+iy)=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi \quad u=x^2-y^2 \quad v=2xy$

$y=2 \to u=x^2-4 \quad v=4x$

$u=\frac{1}{16}v^2-4$



حد: $N=\{Z;\ 0<|Z-Z_0|<r\}$

اگر تابع $f(Z)$ در همسایگی محذوف Z_0 تعریف شده باشد آنگاه:

$\lim_{Z\to Z_0} f(Z)=w_0$

اگر $\forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall Z\in D_f\ (0<|Z-Z_0|<\delta \Rightarrow |f(Z)-w_0|<\varepsilon)$

$0<|x-x_0|<\delta \quad 0<|y-y_0|<\delta$

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

مثال: $\lim_{Z\to(3i-2)}(4Z-i)=11i-8$

$\forall\varepsilon\,\exists\delta\,\forall Z\in\mathbb{C}\ (0<|Z-3i-2|<\delta \Rightarrow |(4Z-i)-(11i-8)|<\varepsilon$

$|(4Z-i)-(11i-8)|=|4Z-12i+8|=4|Z-(3i-2)|$

$\delta<\frac{\varepsilon}{4}\qquad <4\delta<\varepsilon$

قضیه: فرض کنید تابع $f(Z)=u+iv$ در همسایگی محذوف $Z_0=x_0+iy_0$ تعریف شده باشد

در این صورت:

$\lim_{Z\to Z_0}f(Z)=w_0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=Re(w_0)$

و

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v(x,y)=Im(w_0)$

مثال: $\lim_{Z\to -i}\frac{\bar{Z}-i}{Z+i}=?\qquad \frac{x-iy-i}{x+iy+i}=\frac{x-i(y+1)}{x+i(y+1)}\times\frac{x-i(y+1)}{x-i(y+1)}$

$=\frac{(x-(y+1)i)^2}{x^2+(y+1)^2}=\frac{x^2-(y+1)^2-2x(y+1)i}{x^2+(y+1)^2}\qquad u(x,y)=\frac{x^2-(y+1)^2}{x^2+(y+1)^2}$

$v(x,y)=\frac{-2x(y+1)}{x^2+(y+1)^2}\qquad \lim_{(x,y)\to(0,-1)}u(x,y)=\lim\frac{x^2-(y+1)^2}{x^2+(y+1)^2}$

$=\begin{cases}+1 & \text{مسیر } y=-1\\ -1 & \text{مسیر } x=0\end{cases}$

Sahand

DATE / / SUBJECT:

تعریف: می‌گوییم تابع f در نقطه Z_0 پیوسته است اگر $\lim_{Z \to Z_0} f(Z) = f(Z_0)$

قضیه: توابع چندجمله‌ای در هر نقطه از $\mathbb{C}$ پیوسته‌اند.

" گویا در دامنه تعریفشان پیوسته است

مثال: تابع $f(x) = \bar{Z}$ در هر نقطه پیوسته است

قضیه: اگر توابع f و g در نقطه Z_0 پیوسته باشند آنگاه توابع $\frac{f}{g}$ (به شرط غیرصفر بودن مخرج)

$f \cdot g$ ، $f \pm g$ نیز در نقطه Z_0 پیوسته است $\quad w = g(f(Z))$

قضیه: f پیوسته است اگر و تنها اگر $Re(f)$ و $Im(f)$ پیوسته باشند

مشتق: فرض کنید تابع f در همسایگی Z_0 تعریف شده باشد

$$f'(Z_0) = \lim_{Z \to Z_0} \frac{f(Z) - f(Z_0)}{Z - Z_0} = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{f(Z_0 + \Delta Z) - f(Z_0)}{\Delta Z}$$

مثال: الف) $f(Z) = Z^4$ ، $f'(i) = ?$

$$f'(i) = \lim_{Z \to i} \frac{Z^4 - i^4}{Z - i} = \lim_{Z \to i} \frac{(Z-i)(Z+i)(Z^2+i^2)}{Z-i} = (2i)(i^2+i^2) = 4i^3$$

ب) $f(Z) = \bar{Z}$ $\quad f'(i) = ?$

$$f'(i) = \lim_{Z \to i} \frac{\bar{Z} - \bar{i}}{Z - i} = \lim_{Z \to i} \frac{\bar{Z} + i}{Z - i} = \lim_{(x,y) \to (0,1)} \frac{x - iy + i}{x + iy - i} =$$ حد موجود نیست

Sahand

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

قضیه:

الف) اگر $f(Z)=C \Rightarrow f'(Z)=0 \quad \forall Z$

ب) اگر $f(Z)=Z^n \Rightarrow f'(Z)=nZ^{n-1} \quad \forall Z$

قضیه:

$(f\pm g)'=f'\pm g' \qquad (f.g)'=f'g+fg'$

$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2} \qquad \big((g\circ f)(Z)\big)'=f'(Z).g'(f(Z))$

کوشی ریمان

$f(Z)=u+iv \qquad u_x=v_y \ , \ u_y=-v_x$

اگر معادله‌ای مشتق پذیر باشد هر دو معادله کوشی ریمان برقرار است اما عکس آن برقرار نیست

$f(Z)=Z^2=x^2-y^2+2xyi \quad \begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases} \quad \begin{cases} u_x=2x \\ v_y=2x \end{cases} \quad \begin{cases} u_y=-2y \\ v_x=2y \end{cases}$

قضیه شرط لازم: اگر تابع $f(Z)=u+iv$ در نقطه $Z_0=x_0+iy_0$ مشتق پذیر باشد آنگاه معادله کوشی ریمان در (x_0,y_0) برقرار می‌باشد

مثال: $f(Z)=Z^3+Z \rightarrow f'(Z)=3Z^2+1$

$f(x+iy)=(x+iy)^3+(x+iy)=x^3+3x^2yi-3xy^2-iy^3+x+iy$

$\begin{cases} u=x^3-3xy^2+x \\ v=3x^2y-y^3+y \end{cases} \quad \begin{cases} u_x=3x^2-3y^2+1 \\ v_y=3x^2-3y^2+1 \end{cases} \quad \begin{cases} u_y=-6xy \\ v_x=6yx \end{cases}$

* عکس قضیه فوق در حالت کلی برقرار نمی‌باشد به طور مثال می‌توان نشان داد تابع $f(Z)$

DATE / / SUBJECT:

با ضابطه زیر در مبدا مختصات مشتق پذیر نیست ولی دو معادله کوشی ریمان برقرار است

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\bar{z}^2}{z} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases} \qquad f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\bar{z}^2}{z}-0}{z-0}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x-iy}{x+iy}\right)^2$$

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=1=\frac{\partial v}{\partial y}(0,0)$? $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=0=-\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$ مسیر $y=mx$

قضیه شرط کافی: فرض می‌کنیم تابع $f(z)=u+iv$ در همسایگی $z_0=x_0+iy_0$ تعریف شده باشد اگر

توابع u و v و u_x و u_y و v_x و v_y در نقطه (x_0,y_0) پیوسته بوده و معادلات

کوشی ریمان در این نقطه برقرار باشند آنگاه $f'(z_0)$ موجود بوده و رابطه زیر برقرار است:

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

مثال: نقاط مشتق پذیر را بیابید.

الف) $f(z)=\bar{z}=x-iy$ $\begin{cases}u=x\\ v=-y\end{cases}$

$\begin{cases}u_x=1\\ v_y=-1\end{cases}$ $\begin{cases}u_y=0\\ v_x=0\end{cases}$ نقطه مشتق پذیر ندارد

ب) $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ $\begin{cases}u=x^2+y^2\\ v=0\end{cases}$ $\begin{cases}u_x=2x\\ v_y=0\end{cases}$ → $\boxed{x=0}$ $\begin{cases}u_y=2y\\ v_x=0\end{cases}$ → $\boxed{y=0}$

فقط در مبداء مختصات مشتق دارد

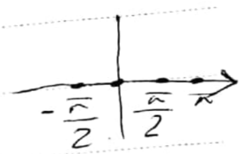
ج) $f(z)=f(x+iy)=\sin x\cosh y-i\cos x\sinh y$

$u=\sin x\cosh y$ $v=-\cos x\sinh y$

Sahand

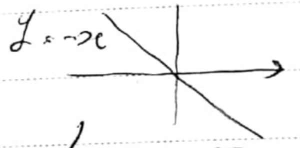
Scanned by CamScanner

$\begin{cases} u_x = \cos x \cosh y \\ v_y = -\cos x \cosh y \end{cases} \rightarrow \cos x \cosh y = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$



$\begin{cases} u_y = \sin x \sinh y \\ v_x = \sin x \sinh y \end{cases} \rightarrow \sin x \sinh y = 0 \quad x = k\pi ,\ y = 0$

$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} u_x = 2x \\ v_y = -2y \end{cases} \rightarrow \boxed{y = -x} \quad \begin{cases} u_y = 2y \\ v_x = 2x \end{cases} \rightarrow \boxed{y = -x}$



تابع تحلیلی: می‌گوییم تابع $f(z)$ تحلیلی است اگر همسایگی از z_0 یافت شود بطوریکه در همه‌ی نقاط این همسایگی مشتق f موجود باشد.

تابع تام: تابعی که در هر نقطه از صفحه‌ی مختلط تحلیلی باشد. توابع چندجمله‌ای تام هستند.

* توابع گویا در دامنه تعریفشان تحلیلی اند.

* توابع مثال قبل همه غیرتحلیلی اند. (هیچ یک از نقاط روی خط نمی‌تواند تحلیلی باشد)

تابع هارمونیک (همساز): اگر $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ تابع x و y هارمونیک است

مثال: $u(x,y) = x^2 - y^2 - xy + y$ ✓ هارمونیک

اگر $f(z)$ تحلیلی باشد u و v هارمونیک خواهند بود $u_{xx} = v_{yx}$ ←
$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

اگر u تابع هارمونیک باشد آنگاه بخش حقیقی یک تابع تحلیلی است (موهومی)

$\exists\, v(x,y) \ni f = u + iv$ — v را مزدوج هارمونیک u می‌نامند

مزدوج همساز را پیدا کنید؟

مثال: $u(x,y) = x^2 - y^2 - xy + y$ — $\exists\, v \ni : f = u + iv$ تحلیلی است

یعنی: ↓

$\exists\, v \ni : u_x = v_y \,,\; u_y = -v_x$

$v_y = u_x = 2x - y \rightarrow v(x,y) = 2xy - \frac{1}{2}y^2 + C(x)$ ⟵ انتگرال

$-2y - x + 1 = -(2y + C'(x)) \quad C'(x) = x - 1 \quad C(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + C$

$v(x,y) = 2xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - x + C \quad f = u + iv = ___$

$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad y = \frac{z + \bar{z}}{2i}$

مثال: کلیه توابع هارمونیک به فرم $u(x,y) = f(x^2 + y^2)$ را بیابید

$\frac{x^2 + y^2}{x}$ ، $\frac{x^2 + y^2}{y}$ — فرض: $t = x^2 + y^2 \rightarrow u = f(t)$

$u_x = \frac{\partial t}{\partial x} f'(t) = 2x f'(t) \quad u_{xx} = 2f'(t) + 2x \cdot \frac{\partial t}{\partial x} f''(t)$
$= 2f'(t) + 4x^2 f''(t)$

$u_y = \frac{\partial t}{\partial y} f'(t) = 2y f'(t) \quad u_{yy} = 2f'(t) + 4y^2 f''(t)$

$4f'(t) + 4t f''(t) = 0$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{-1}{t}$ $(Ln f'(t))' = -\frac{1}{t}$ $Ln f'(t) = -Ln t + Ln c_1$

$f'(t) = \frac{c_1}{t}$ $f(t) = c_1 Ln t + c_2$

مثال: مزدوج همساز؟

$u(x,y) = c_1 Ln(x^2+y^2) + c_2$

اگر $Z = x+iy \Rightarrow f(Z) = e^Z = e^x \cos y + i e^x \sin y$

$u = e^x \cos y$ $v = e^x \sin y$ $\begin{cases} u_x = e^x \cos y \\ v_y = e^x \cos y \end{cases}$ $\begin{cases} u_y = -e^x \sin y \\ v_x = e^x \sin y \end{cases}$

$(e^Z)' = e^Z$

بعضی از خواص: 1) $e^{Z_1+Z_2} = e^{Z_1} \cdot e^{Z_2}$ 2) $e^{-Z} = \frac{1}{e^Z}$

3) $e^{Z_1 - Z_2} = \frac{e^{Z_1}}{e^{Z_2}}$ 4) $e^{Z+2K\pi i} = e^Z$ (متناوب بودن) یک به یک نیست

5) $e^Z = 1 \iff Z = 2K\pi i$ 6) $|e^Z| = e^x$, $arg(e^Z) = y + 2K\pi$

اگر دامنه تعریف تابع e^Z را مجموعه ای بفرم $A_{y_0} = \{Z = x+iy ; y_0 < y \leq y_0 + 2\pi , x \in R\}$

در نظر بگیریم آن گاه می توان نشان داد تابع f از این مجموعه به مجموعه $\mathbb{C} - \{0\}$ یک به یک و پوشا است

بنابراین وارون تابع f از مجموعه $\mathbb{C} - \{0\} \to A_{y_0}$ قابل تعریف است

$f^{-1}(Z) = \ln Z = Ln|Z| + i(Arg(Z) + 2K\pi)$

درحالتی که $K=0$ باشد مقدار log را شاخه اصلی log می نامند

PAPCO

Subject
Date

مثال: $Ln\, i = Ln 1 + \frac{\pi}{2} i = \frac{\pi}{2} i$

$Ln(1+i) = Ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} i$ $\quad Ln(-e) = Ln e + \pi i = 1 + \pi i$

مثال: $Ln Z = Ln\sqrt{x^2+y^2} + i \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$u = \frac{1}{2} Ln(x^2+y^2)$, $v = Arg(Z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v_y = \dfrac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_y = \dfrac{y}{x^2+y^2} \\ v_x = \dfrac{\frac{-y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

مسئله: نشان دهید تابع $h(Z) = Arg(Z)$ جز در مبدا و بخش منفی محور حقیقی

$$\lim Arg(Z) = \begin{cases} \pi & x = x_0,\ y > 0 \text{ مسیر} \\ -\pi & x = x_0,\ y < 0 \text{ مسیر} \end{cases}$$

در مابقی نقاط پیوسته است

نتیجه ①: تابع $Ln Z$ جز در مبدا و بخش منفی محور حقیقی در مابقی نقاط تحلیلی است

$$(Ln Z)' = \frac{1}{Z}$$

نتیجه ②: نقاط غیر تحلیلی تابع $Ln\, g(Z)$ جواب دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} Im(g(Z)) = 0 \\ Re(g(Z)) \leqslant 0 \end{cases}$$

PAPCO

مثال: $h(Z) = Ln(Z^2+i)$ $\quad Z^2+i = x^2-y^2+(2xy+1)i$

نقاط مشتق ناپذیری:
$$\begin{cases} 2xy+1=0 \longrightarrow y=\frac{-1}{2x} \\ x^2-y^2\leq 0 \longrightarrow y=\pm x \end{cases}$$

$$h'(Z)=\frac{2Z}{Z^2+i}$$

رابطه اویلر: $e^{ix}=\cos x+i\sin x \quad e^{-ix}=\cos x-i\sin x$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad , \quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

تعریف: اگر $\sin Z=\frac{e^{iZ}-e^{-iZ}}{2i} \quad , \quad \cos Z=\frac{e^{iZ}+e^{-iZ}}{2}$

$(\sin Z)'=\cos Z \ , \ (\cos Z)'=-\sin Z \quad \forall Z \quad \tan Z=\frac{\sin Z}{\cos Z}$

تعریف: $\sinh Z=\frac{e^{Z}-e^{-Z}}{2} \quad , \quad \cosh Z=\frac{e^{Z}+e^{-Z}}{2}$

مثال: $f(Z)=\sin Z \quad Re(f)=? \quad Im(f)=?$

$f(x+iy)=\sin(x+iy)=\sin x\cos(iy)+\cos x\sin(iy)$

$\cos(iy)=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}=\cosh y \quad \sin(iy)=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}=i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=i\sinh y$

$\sin Z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$

$$\begin{cases} u=\sin x\cosh y \\ v=\cos x\sinh y \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

نتیجه: $u^2+v^2=\sin^2 x\cosh^2 x+\cos^2 x\sinh^2 y=\cosh^2 y-\cos^2 x$

همچنین: $u^2+v^2=\sin^2 x+\sinh^2 y\geq\sinh^2 y$

$|\sinh y|\leq|\sin z|\leq\cosh y \qquad \lim_{z\to\infty}\sin z=\infty$

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y}+\frac{v^2}{\sinh^2 y}=1 \qquad \frac{u^2}{\sin^2 x}-\frac{v^2}{\cos^2 x}=1$$

Scanned by CamScanner

مثال: $w = \sin Z \quad u = ? \quad v = ?$

$\sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$

$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \cosh y$

$\sin(iy) = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = i\sinh y$

$u = \sin x \cosh y \quad , \quad v = \cos x \sinh y$

(1) نتیجه $\frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1 \qquad \frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\sinh^2 y} = 1$

(2) $u^2 + v^2 = \sin^2 x + \cosh^2 y + \cos^2 x + \sinh^2 y$ → $\cosh^2 y - 1$, $\cos^2 x$ → $1 - \sin^2 x$

$= \sinh^2 y + \sin^2 x \geq \sinh^2 y$

همچنین: $u^2 + v^2 = \cosh^2 y - \cos^2 x \leq \cosh^2 y$

$\sinh^2 y \leq |\sin Z|^2 \leq \cosh^2 y \qquad |\sinh y| \leq |\sin Z| \leq \cosh y$

$\lim_{Z \to \infty} \sin Z = \infty$

مثال: $w = \sin Z \quad \sin^{-1} Z = ?$

اگر $w = \sin^{-1} Z \Rightarrow Z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$

$\Rightarrow e^{iw} - \frac{1}{e^{iw}} = 2iZ$

$(e^{iw})^2 - 2iZe^{iw} - 1 = 0 \qquad e^{iw} = \frac{2iZ + \sqrt{-4Z^2 + 4}}{2} = iZ + \sqrt{1-Z^2}$

$iw = \mathrm{Ln}(iZ + \sqrt{1-Z^2}) \qquad \sin^{-1} Z = -i\,\mathrm{Ln}(iZ + \sqrt{1-Z^2})$

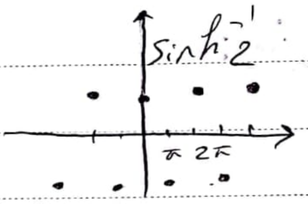
مثال: $\sin Z = 2i \quad Z = ?$

$\sin x \cosh y + i\cos x \sinh y = 2i \qquad \begin{cases} \sin x \cosh y = 0 \to x = k\pi \\ \cos x \sinh y = 2 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

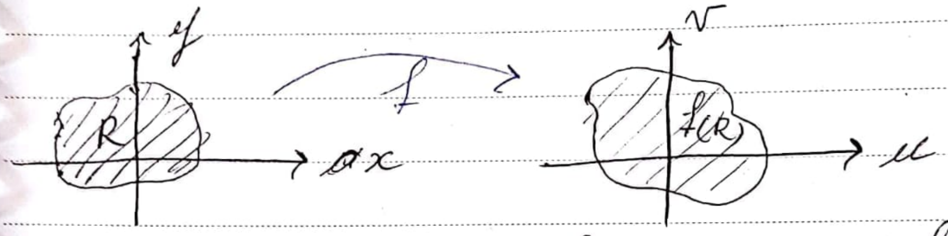
اگر K زوج باشد $\Leftarrow \sinh y = 2 \rightarrow y = \sinh^{-1} 2$

اگر K فرد باشد $-\sinh y = 2 \rightarrow y = -\sinh^{-1} 2$



تمرین: $Re(\tan Z) = ?$ $\quad Re(\tanh Z) = ?$

نگاشت:



انتقال $f(Z) = Z + a$ $\quad$ دوران $f(Z) = bZ$ $\quad$ انعکاس $f(Z) = \dfrac{1}{Z}$

نمایی $f(Z) = e^Z$ $\quad f(Z) = \sin Z$ $\quad$ دوخطی (موبیوس) $f(Z) = \dfrac{aZ+b}{cZ+d}$

الف) تعریف: $f(Z) = Z + a \quad , \quad a = a_1 + i a_2 \quad , \quad a_1, a_2 \in R$

$= x + iy + a_1 + i a_2 = (x + a_1) + i(y + a_2)$

$(x, y) \longrightarrow (x + a_1, y + a_2)$

ب) $f(Z) = bZ \qquad |f(Z)| = |b| \cdot |Z|$

اگر $|b| < 1 \longrightarrow$ انقباض $\quad$ اگر $|b| > 1 \longrightarrow$ انبساط

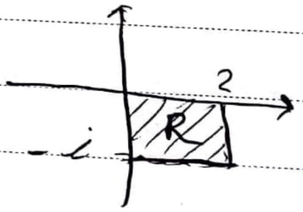
$arg(f(Z)) = Arg(b) + arg(Z)$

(زاویه دوران)

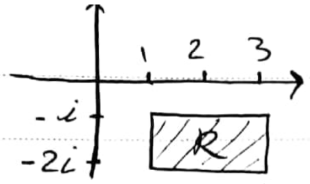
مثال: تصویر ناحیه R را تحت نگاشت های داده شده تعیین کنید.

الف) $f_1(Z) = Z + 1 - i$ $\qquad$ ب) $f_2(Z) = (\sqrt{3} - i)Z$

ج) $f_3(Z) = (1+i)Z - 2 + i$

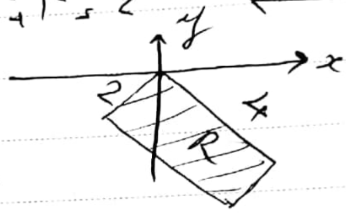


الف)



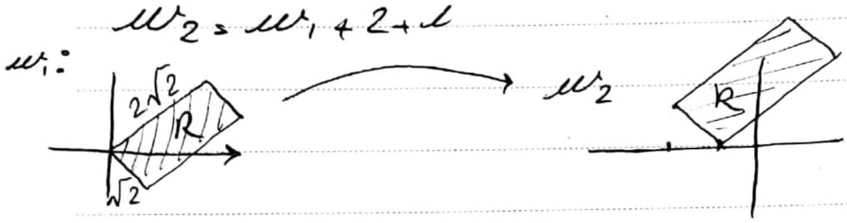
ب) $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \to \tan^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$

ضرب در ← $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$



ج) $w_1 = (1+i)Z \to \frac{\pi}{4}$ دوران

$w_2 = w_1 + 2 + i$

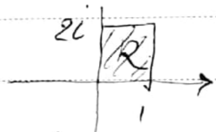


ج) $w = \frac{1}{Z}$ $\quad |w| = \frac{1}{|Z|}$

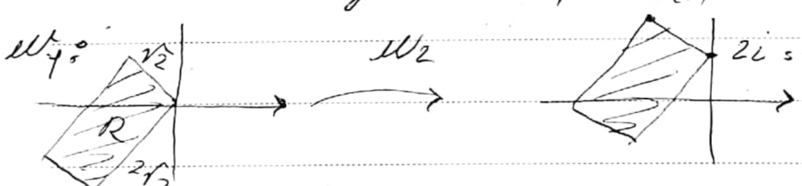
اگر $|Z|<1 \to |w|>1$ اگر $|Z|>1 \to |w|<1$

اگر $|Z|=1 \to |w|=1$

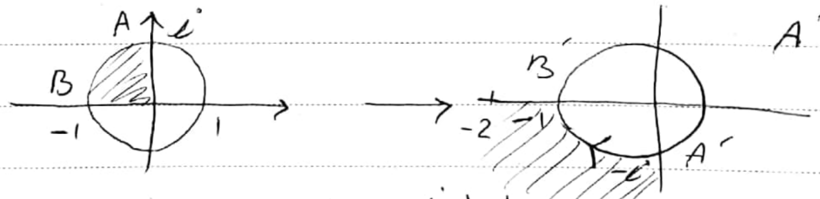
مثال: $f(Z) = (i-1)Z + 2i$



$|i-1| = \sqrt{2}$ $\quad Arg(i-1) = \frac{3\pi}{4}$



مثال:



$A' = \frac{1}{i} = -i$

$B' = \frac{1}{-1} = -1$

تصویر دو نقطه در داخل دایره مثلاً نقطه $\left(\frac{i}{2}, -\frac{1}{2}\right) \to (-2i, -2)$

Subject
Date

می‌توان نشان داد معادله خط یا دایره در دستگاه عدد مختلط به صورت زیر است:

$$AZ\bar{Z}+BZ+C\bar{Z}+D=0$$

$A\neq 0$ و $D\neq 0$ دایره‌ای است که از مبدا نمی‌گذرد

$A\neq 0$ و $D=0$ " " می‌گذرد

$A=0$ و $D\neq 0$ خط است که از مبدا نمی‌گذرد

$A=0$ و $D=0$ " " می‌گذرد

اگر $w=\frac{1}{Z} \rightarrow Z=\frac{1}{w}$

$$A\cdot\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{\bar{w}}+B\cdot\frac{1}{w}+C\cdot\frac{1}{\bar{w}}+D=0 \rightarrow A+B\bar{w}+Cw+Dw\bar{w}=0$$

مثال: تصویر خطوط $x=a\neq 0$ و $y=b\neq 0$ را تحت نگاشت انعکاس بیابید $w=\frac{1}{Z}$

اگر $w=\frac{1}{Z} \rightarrow w=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$

$$u=\frac{x}{x^2+y^2}, \quad v=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

اگر $x=a\neq 0$ $\begin{cases} u=\frac{a}{a^2+y^2} \\ v=\frac{-y}{a^2+y^2}\end{cases} \Rightarrow u^2+v^2=\frac{1}{a^2+y^2}=\frac{u}{a}$

$$\left(u-\frac{1}{2a}\right)^2+v^2=\frac{1}{4a^2} \quad \text{(خط عمودی)}$$

اگر $y=b\neq 0$ $\begin{cases} u=\frac{x}{x^2+b^2} \\ v=\frac{-b}{x^2+b^2}\end{cases} \Rightarrow u^2+v^2=\frac{1}{x^2+b^2}=\frac{-v}{b}$

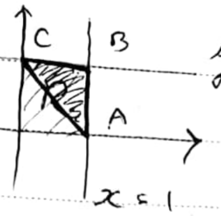
$$u^2+\left(v+\frac{1}{2b}\right)^2=\frac{1}{4b^2} \quad \text{(خط افقی) برد}$$

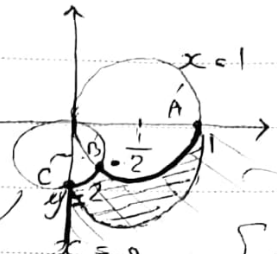
PAPCO

Scanned by CamScanner

Date

مثال:





تصویر کل

اگر $y=0$ ، $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = 0 \end{cases}$ ، $0 < x \leq 1$ ، $\begin{cases} u \geq 1 \\ v = 0 \end{cases}$ ، اگر $x=0$ ، $\begin{cases} u = 0 \\ v = -\frac{1}{y} \end{cases}$ ، $0 < y \leq 2$ ، $\begin{cases} u = 0 \\ v \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$

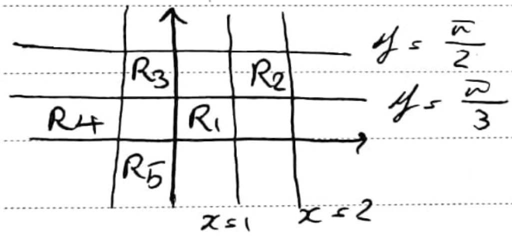
د) $w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d)+b-\frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{cz+d}$

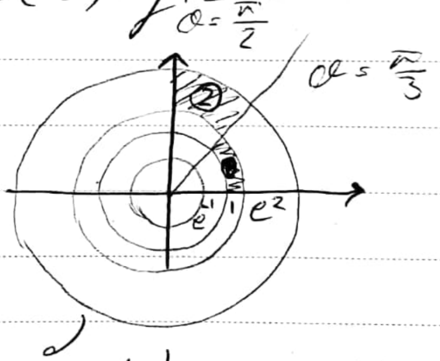
$w_1 = cz \quad w = w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1$

$w_2 = w_1 + d \quad w_3 = \frac{1}{w_2} \quad w_4 = \frac{bc-ad}{c} w_3 \quad w_5 = \frac{a}{c} + w_4$

ه) $w = e^{z}$

اگر $z = x+iy \Rightarrow |w| = e^{x}, \ arg(w) = y + 2k\pi$





اگر $x=a \Rightarrow |w| = e^{a}$ دایره ، اگر $y=b \Rightarrow arg(w) = b$ رادیان

و) $w = \sin z$ $\quad \begin{cases} u = \sin x \cosh y \\ v = \cos x \sinh y \end{cases}$

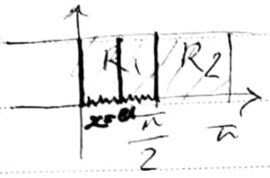
$\frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1$

تصویر خط $x=a$ به شرط آنکه $\sin a \neq 0$ و $\cos a \neq 0$ یکی از
هذلولی است

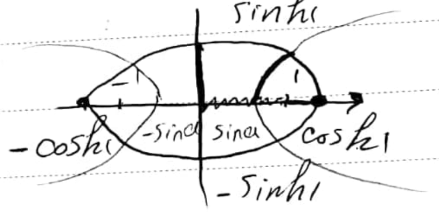
Subject
Date

تصویر $y=b$ به شرط آنکه $\sinh b \neq 0$ یک بیضی (یا بخشی از بیضی) است $\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\sinh^2 y} = 1$

مثال: تصویر نواحی R_1 و R_2 را تحت نگاشت $u = \sin z$ رسم کنید.



$y=1$



$y=0 \Rightarrow \begin{cases} u = \sin x \\ v = 0 \end{cases}$ $\quad 0 < x = u < \frac{\pi}{2} \quad 0 < y < 1$

$x=0$
$0 < y < 1$ $\begin{cases} u = 0 \\ v = \sinh y \end{cases}$

Ya rab on aram jan bi gharar man kojast . . .

Bahar.gh

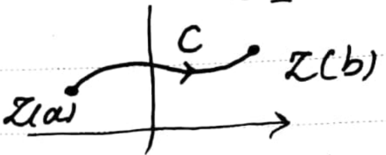
P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

انتگرال معین

کمان $C: z(t)=x(t)+iy(t)$ $\quad a\le t\le b$



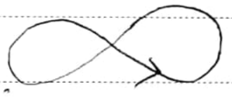
$z'(t)=x'(t)+iy'(t)$ مشتق پذیر گوییم اگر $z'(t)$ موجود و پیوسته باشد

هموار

مجموعه‌ای از مسیرهای هموار به طوری ابتدای کمان $n+1$ ام بر انتهای کمان n ام $\quad C=C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4$

منطبق باشد کانتور گوییم

کمان یا کانتور را ساده می‌نامیم اگر خودش را قطع نکند



کمان یا کانتور را بسته گوییم اگر ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق باشد

بسته است ساده نیست

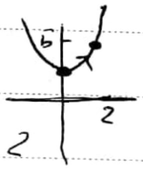
اگر تابع $f(z)$ در نقاط کمان C تعریف شده باشد آنگاه $\int_C f(z)dz$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_{t=a}^{t=b} f(z(t))\cdot z'(t)\,dt$$

مثال: انتگرال تابع $f(z)=\bar{z}$ روی بخشی از سهمی $y=x^2+1$ که $(0,1)$ را به $(2,5)$ متصل می‌کند

$y=h(x)$

$x=t \to y=h(t)$ $\quad$ اگر $x=t$ آنگاه $y=t^2+1$



انتگرال بگیرید.

$x=-t \to y=h(-t)$ $\quad z(t)=t+(t^2+1)i \quad 0\le t\le 2$

$y=t \to x=h^{-1}(t)$

$y=-t \to x=h^{-1}(-t)$ $\quad \int \bar{z}\,dz=\int_0^2 (t-(t^2+1)i)\cdot(1+2ti)\,dt$

$$=\int_0^1 (t-t^2-1+2t^2i-2t^3i-2ti)\,dt=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3-t+\frac{2}{3}t^3i-\frac{2}{4}t^4i-t^2i\Big|_0^2$$

$$=2-\frac{8}{3}-2+\frac{16}{3}i-8i-4i=-\frac{8}{3}+\left(-12+\frac{16}{3}\right)i$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

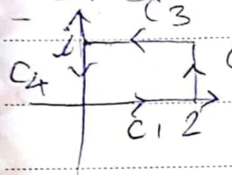
بعضی از خواص انتگرال معین

1) $\int_C (\alpha f(z)+\beta g(z))\,dz = \alpha\int_C f(z)\,dz + \beta\int_C g(z)\,dz$

2) $\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$ 3) $\int_{C_1\cup C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$

4) $\int_C |dz| =$ طول C 5) $\left|\int f(z)\,dz\right| \le \int |f(z)|\cdot|dz|$

مثال: از تابع $f(z)=|z|^2$ روی مستطیل با رئوس ۰ و ۲ و $2+i$ و i انتگرال بگیرید



(همواره در کانتور بسته جهت خلاف عقربه‌های ساعت در نظر می‌گیریم)

$C = C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4$ $|z|^2 = x^2+y^2$

$C_1: z(t) = t+0i \quad 0\le t\le 2$ $C_2: z(t) = 2+ti \quad 0\le t\le 1$

$C_3: z(t) = -t+i \quad -2\le t\le 0$ $C_4: z(t) = -ti \quad -1\le t\le 0$

$$\oint_C |z|^2 dz = \sum_{i=1}^{4}\int_{C_i}|z|^2 dz = \int_0^2 t^2\cdot 1\,dt + \int_0^1 (4+t^2)\cdot i\,dt + \int_{-2}^0 (t^2+1)(-1)\,dt$$

$$+\int_{-1}^0 t^2\cdot(-i)\,dt = \left(\frac13 t^3\Big|_0^2\right) + i\left(4t+\frac13 t^3\Big|_0^1\right) - \left(\left(\frac13 t^3+t\right)\Big|_{-2}^0\right)$$

$$-i\left(\frac13 t^3\Big|_{-1}^0\right) = \frac83 + \frac{13}{3}i + \frac{-14}{3} - \frac13 i = -2+4i \ne 0$$

فرض می‌کنیم C یک کانتور ساده و بسته باشد اگر f روی C و درون C تحلیلی باشد: (کوشی ریمان)

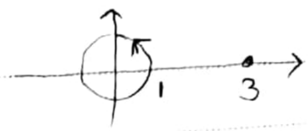
$\oint f(z)\,dz = 0$ $f(z) = u+iv$ و $C: z = x+iy$

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C (u+iv)(dx+i\,dy) = \oint_C u\,dx - v\,dy + i\oint_C v\,dx + u\,dy$$

گرین $= \iint_R (-v_x - u_y)\,dA + i\iint_R (u_x - v_y)\,dA = 0$

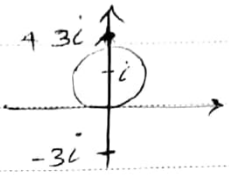
Scanned by CamScanner

مثال: الف) $\oint \sin\left(\frac{1}{z-3}\right) dz = 0$ $|z|=1$



نقطه خارج دایره C
پس جواب صفر

ب) $\oint \frac{\sin z\, dz}{z^2+9} = 0$ $|z-i|=1$



فرض می‌کنیم C_1 و C_2 دو کانتور بسته و C_1 درون C_2 باشد اگر تابع $f(z)$ روی C_1 و C_2 و در نقاط بین C_1 و C_2 تحلیلی باشد آنگاه:

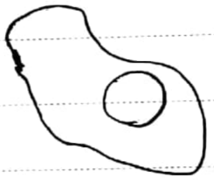
$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

مثال: $\oint_C \frac{1}{z-z_0}dz$

الف) C یک کانتور ساده و بسته است z_0 خارج آن است: صفر می‌شود

ب) 〃 〃 〃 〃 داخل 〃

چون z_0 داخل کانتور قرار دارد می‌توان دایره C_0 حول z_0 را طوری در نظر گرفت که داخل C باشد.



$C_0: z-z_0 = re^{i\theta}$ $0\leq\theta\leq 2\pi$

$$I=\oint_{C_0}\frac{1}{z-z_0}dz = \int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{i\theta}} \cdot rie^{i\theta}d\theta = 2\pi i$$

فرمول کوشی: فرض می‌کنیم C یک کانتور ساده و بسته و z_0 درون C باشد اگر تابع $f(z)$ روی C و درون C تحلیلی باشد آنگاه:

$$\oint_C \frac{f(z)dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

مثال: $I=\oint_C \frac{\sin z\,dz}{z^2+1}$

الف) $C: |z| = \frac{1}{3}$ صفر است

ب) $C: |z-i| = \frac{1}{2}$ $I=\oint_C \frac{\frac{\sin z}{z+i}}{z-i}dz = 2\pi i f(i) = \pi \sin i = (\pi \sinh 1) i$

ج) $C: |z|=2$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

2) $\frac{1}{Z^2+1} = \frac{1}{(Z-i)(Z+i)} = \frac{A}{Z-i} + \frac{B}{Z+i} = \frac{AZ+Ai+BZ-Bi}{(Z-i)(Z+i)}$

$i\begin{cases} A+B=0 \\ Ai-Bi=1 \end{cases}$ $\quad A=\frac{1}{2i} \quad B=\frac{-1}{2i}$

$2Ai=1$

$I=\int\left(\frac{\frac{1}{2i}\sin Z}{Z-i} + \frac{-\frac{1}{2i}\sin Z}{Z+i}\right)dZ = 2\pi i\, g_1(i) + 2\pi i\, g_2(-i)$

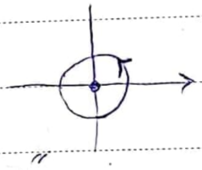
$= 2\pi i\left(\frac{1}{2i}\sin i - \frac{1}{2i}\sin(-i)\right)$

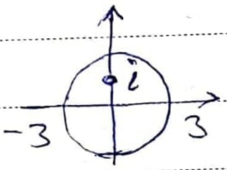
حالت کلی فرمول انتگرال کوشی:

اگر تابع $f(Z)$ روی C و درون C تحلیلی باشد آنگاه مشتقات تابع f در نقطه Z_0 درون C موجود بوده و کلیه‌ی مشتق‌ها در نقطه Z_0 تحلیلی می‌باشند و روابط زیر برقرار اند.

$f^{(n)}(Z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(Z)dZ}{(Z-Z_0)^{n+1}} \quad (n=0,1,2,\dots)$

$\oint_C \frac{f(Z)dZ}{(Z-Z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(Z_0)$

مثال: $I_1 = \oint_{|Z|=1} \frac{e^{2Z}dZ}{Z^3}$  $= \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = 4\pi i$

$I_2 = \oint_{|Z|=3} \frac{\cos Z\, dZ}{(Z-i)^3} = \frac{2\pi i}{2!} f''(i) = -\pi i \cos i$ 

$I_3 = \oint_{|Z|=2} \frac{(Z^2+1)dZ}{Z^3(Z-i)} = \frac{A}{Z^2} + \frac{B}{Z} + \frac{C}{Z-i} =$

باید درجه را هم بنویسیم

$= \frac{A(Z-i)+BZ(Z-i)+CZ^2}{Z^2(Z-i)} = \frac{(B+C)Z^2+(A-Bi)Z-Ai}{Z^2(Z-i)}$

$\begin{cases} B+C=1 \\ A-Bi=0 \end{cases}$ $\quad B=\frac{A}{i}=\frac{4i}{i}=4$

$-Ai=4 \rightarrow A=\frac{-4}{i}=4i$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$\int \frac{(Z^2+4)dZ}{Z^2(Z-i)} = \int \left(\frac{4i}{Z^2} + \frac{4}{Z} + \frac{-3}{Z-i}\right)dZ$$

(f_1, f_2, f_3)

$$= \frac{2\pi i}{1!} f_1'(0) + 2\pi i f_2(0) + 2\pi i f_3(i) = 0 + 8\pi i - 6\pi i = 2\pi i$$

$$I = \int \frac{Ln(Z^2+5)}{Z^2+1} dZ \qquad |Z| = 1.1$$

اثبات نامساوی کوشی قضیه لیوویل و کاربردش

اگر تابع $f(Z)$ در نقطه Z_0 تحلیلی باشد آنگاه در این نقطه از هر مرتبه‌ای مشتق پذیر است و کلیه این مشتق‌ها در Z_0 تحلیلی است

بنابراین تابع $f(Z)$ بصورت سری تیلور قابل نمایش است $f(Z) = \sum \frac{f^{(n)}(Z_0)}{n!}(Z-Z_0)^n$

که در آن $f^{(n)}(Z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(Z)dZ}{(Z-Z_0)^{n+1}}$

سری توانی و سری لوران :

از طرف دیگر اگر $\{a_n\}$ به صورت دنباله اعداد مختلط باشد آنگاه یک سری توانی

حول نقطه Z_0 است اگر R شعاع همگرایی این سری توانی باشد آنگاه به ازای هر Z که $|Z-Z_0|<R$

می‌توانیم از سری توانی فوق به صورت جمله به جمله مشتق بگیریم

$$h(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z-Z_0)^n$$

دامنه همگرایی تغییر نمی‌کند یعنی $h(Z)$ در Z تحلیلی است

$$h'(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (Z-Z_0)^{n-1}$$

بنابراین اگر تابع $h(Z)$ در نقطه Z_0 غیر تحلیلی باشد نمی‌توانیم آنرا به صورت سری توانی با جمله‌های

$(Z-Z_0)^n$ و با توان‌های مثبت بنویسیم ولی می‌توان $h(Z)$ را به صورت یک سری توانی حول Z_0 با

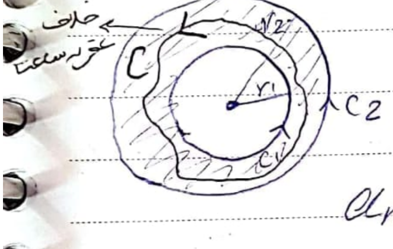
جمله‌های $(Z-Z_0)^n$ با توان‌های مثبت و منفی بصورت زیر نمایش داد

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \quad (1)$$

فرض می‌کنیم C_1 و C_2 دو دایره به مرکز z_0 و با شعاع‌های $r_1<r_2$ باشد اگر تابع $f(z)$ در نقاط C_1 و C_2 و در نقاط روی C_1 و روی C_2 تحلیلی باشد آنگاه به ازای هر z که $r_1<|z-z_0|<r_2$ می‌توان f را به فرم سری لوران (1) نمایش داد که در آن a_nها و b_nها ضرایب سری لوران f نامیده می‌شوند و با استفاده از روابط زیر بدست می‌آید



$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n=0,1,\ldots)$$

دامنه همگرایی این را می‌توان با کوچک‌تر کردن شعاع r_1 و بزرگ‌تر کردن شعاع r_2 تا جایی که از نقطه غیرتحلیلی عبور نکنیم گسترش داد و این دامنه همگرایی سری لوران منحصربه‌فرد است.

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C (z-z_0)^{n-1} f(z)\,dz \quad (n=1,2,\ldots)$$

$$\oint f(z)\,dz=2\pi i\, b_1$$

مثال: $\displaystyle\oint_{|z|=1} z^4 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$

$\sin u = u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}$ ← سری مک لورن $\sin\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!\,z^3}+\frac{1}{5!\,z^5}-\cdots$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$\Rightarrow z^4 \sin(\frac{1}{z}) = z^3 - \frac{1}{3!}z + \frac{1}{5!\,z} - \frac{1}{7!\,z^3} + \cdots$

$\sum a_n (z-z_0)^n + \sum \frac{b_n}{(z-z_0)^n} = \cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2$

با مقایسه روابط داریم: $a_0 = 0$ $\quad b_1 = -\frac{1}{5!}$ $\quad \frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+u^3+\cdots \quad |u|<1$

$a_1 = -\frac{1}{3!}$ $\quad b_2 = 0$

$a_2 = 0$ $\quad b_3 = -\frac{1}{7!}$ $\quad \frac{1}{1+u} = 1-u+u^2-u^3+\cdots \quad |u|<1$

$a_3 = 1$

$a_n = 0 \quad n \geq 4$

سری لوران تابع f را حول $z_0=1$ و $z_0=-4$ حساب کنید. $f(z) = \frac{5z-2}{(z-1)(z+4)}$

چون در صورت و مخرج $z-1$ است $z-1$ را در صورت می‌سازیم

$f(z) = \frac{1}{z+4} \cdot \frac{5z-2}{z-1} = \frac{1}{z+4} \cdot \frac{5(z-1)+3}{z-1}$

$= \frac{1}{z+4}\left[5 + \frac{3}{z-1}\right] = \frac{1}{z+4}\left[5 + \frac{3}{(z+4)-5}\right] = \frac{1}{z+4}\left[5 + \frac{-\frac{3}{5}}{1-\frac{(z+4)}{5}}\right]$ می‌توان بعد از $z+4$ فاکتور گرفت

$= \frac{1}{z+4}\left[5 - \frac{3}{5}\left(1 + \frac{z+4}{5} + \left(\frac{z+4}{5}\right)^2 + \cdots\right)\right]$ $\quad \left|\frac{z+4}{5}\right| < 1$ با استفاده از روابط بالا

b_1: $\frac{\frac{22}{5}}{z+4} - \frac{3}{5^2} - \frac{3}{5^3}(z+4) - \frac{3}{5^4}(z+4)^2 + \cdots \quad |z+4| < 5$ نقاط همگرایی داخل دایره

(a_0, a_1, a_2)

مثال: $f(z) = \frac{5z-2}{(z-1)(z+4)}$ $\quad 1<|z|<4$ سری لوران f را در دامنه همگرایی داده شده بیابید.

$f(z) = \frac{\frac{3}{5}}{z-1} + \frac{\frac{22}{5}}{z+4} = \frac{\frac{3}{5z}}{1-\frac{1}{z}} + \frac{\frac{22}{20}}{1+\frac{z}{4}}$

$= \frac{3}{5z}\left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots\right] + \frac{22}{20}\left[1 - \frac{z}{4} + \left(\frac{z}{4}\right)^2 - \left(\frac{z}{4}\right)^3 + \cdots\right]$

$\left|\frac{z}{4}\right| < 1 \quad z < 4$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال: سری لوران را حول $z=0$ بنویسید سپس مقدار $\oint_{|z|=1} f(z)\,dz$ را حساب کنید.

$f(z)=z(\sin z)e^{-\frac{1}{z}}$

$\sin u = u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-\cdots \quad u\in\mathbb{C}$

$e^u = 1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\cdots \quad u\in\mathbb{C}$

$f(z)=z\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right)$

$=\left(z^2-\frac{z^4}{3!}+\frac{z^6}{5!}-\frac{z^8}{7!}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}-\cdots\right)$

$=\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{3!6!}+\frac{1}{5!8!}-\cdots\right)}_{b_2}\frac{1}{z^2}+\underbrace{\left(-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!5!}-\frac{1}{5!7!}+\cdots\right)}_{b_1}\frac{1}{z}+$

$+\underbrace{\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!4!}+\cdots\right)}_{a_0}+\underbrace{\left(-1+\frac{1}{3!3!}-\cdots\right)}_{a_1}z+\underbrace{\left(1-\frac{1}{3!2!}+\frac{1}{5!4!}\right)}_{a_2}z^2$

$+\cdots \qquad b_1=\sum\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!\,(2n+3)!} \Rightarrow I=2\pi i\,b_1$

مثال: $I=\oint\underbrace{(z^3+3z)(\cos\frac{1}{z}).e^{-\frac{1}{z^2}}}_{f(z)}dz=?$

$f(z)=z^3\cos\frac{1}{z}.e^{-\frac{1}{z^2}}+3z\cos\frac{1}{z}.e^{-\frac{1}{z^2}}$

$=z^3\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\cdots\right)\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z^4}-\frac{1}{3!z^6}+\cdots\right)$

$+3z\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\cdots\right)\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z^4}-\frac{1}{3!z^6}+\cdots\right)$

ضریب $\frac{1}{z}$: $b_1=\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-3-\frac{3}{2!}=-2+\frac{1}{24}-\frac{3}{2}=\frac{-48+1-36}{24}=-\frac{83}{24}$

$I=2\pi i\,\frac{-83}{24}=\frac{-83\pi i}{12}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

مثال: $I = \oint \frac{z\cos\frac{1}{z}}{z+3}\, dz = ?$ $\qquad \cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots \quad u \in$

$$\frac{z\cos\frac{1}{z}}{z+3} = z\cdot\frac{1}{z+3}\cdot\cos\frac{1}{z} = z\,\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{z}{3}}\cdot\cos\frac{1}{z}$$

$$= \frac{z}{3}\left(1-\frac{z}{3}+\left(\frac{z}{3}\right)^2-\left(\frac{z}{3}\right)^3+\dots\right)\left(1-\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{4!\,z^4}-\frac{1}{6!\,z^6}+\dots\right)$$

$$b_1 = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3^2\cdot 4!}-\frac{1}{3^4\, 6!}+\dots\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{2n-1}\cdot(2n)!}$$

$$I = 2\pi i\, b_1 = 2\pi i \sum \frac{(-1)^n}{3^{2n-1}\cdot(2n)!}$$

تکین: اگر تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تعریف نشده باشد آن را یک نقطه تکین (منفرد) می‌نامند

اگر تابع در نقطه z_0 غیرتحلیلی باشد آن را نقطه تکین می‌نامند

تکین تنها: اگر z_0 یک نقطه منفرد برای $f(z)$ باشد و همسایگی محذوف از این نقطه وجود داشته باشد که در این همسایگی محذوف تابع $f(z)$ تحلیلی باشد آنگاه z_0 را تکین تنها یا منفرد جدا شده می‌نامند

برای مثال $z_0 = 0$ یک نقطه تکین برای توابع $f(z) = \frac{1}{z}$ و $g(z) = \operatorname{Ln} z$

این نقطه برای $f(z)$ تکین تنهاست اما برای $g(z)$ این طور نیست

اگر تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تکین تنها باشد آنگاه حول این نقطه دارای نمایش سری لوران به صورت زیر است:

$$f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n + \sum \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

اگر k بزرگترین عدد صحیحی باشد که $b_k \neq 0$ آن گاه z_0 را قطب مرتبه k برای $f(z)$ می نامند

قطب مرتبه اول را قطب ساده می گوییم

اگر همه ی b_n ها صفر باشد آن گاه z_0 را رفع شدنی گویند

اگر تعداد نامتناهی از b_n ها غیر صفر باشد آن گاه z_0 را قطب اساسی یا ضروری تابع می نامند

در هر یک از حالت های فوق b_1 را مانده تابع f در نقطه z_0 می نامند

$$b_1 = \underset{z=z_0}{Res}(f(z)) \quad \text{یا} \quad b_1 = Res[f(z), z_0]$$

قضیه: فرض می کنیم C یک کانتور ساده و بسته باشد اگر تابع $f(z)$ روی C و درون C به جز احتمالاً روی نقاط تکین تنها z_1 ، z_2 ، z_n درون C تحلیلی باشد آن گاه رابطه زیر برقرار است:

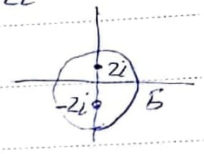
$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \underset{z=z_j}{Res}(f(z))$$

قضیه: فرض می کنیم z_0 یک نقطه تکین تنهای $f(z)$ باشد در این صورت z_0 قطب ساده $f(z)$ است اگر و تنها اگر $\lim_{z \to z_0} (z-z_0)f(z)$ موجود و مخالف صفر باشد در این صورت داریم:

$$\underset{z=z_0}{Res}(f(z)) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)f(z)$$

Scanned by CamScanner

مثال: $I=\oint_{|z|=6}\frac{\sin z\,dz}{z^2(z^2+4)}=2\pi i\Big(\overset{K_1}{\underset{z=0}{\text{Res}}(f(z))}+\overset{K_2}{\underset{z=2i}{\text{Res}}(f(z))}+\underset{z=-2i}{\text{Res}}(f(z))\Big)$



$\lim_{z\to 0} z f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z\sin z}{z^2(z^2+4)}=\frac{1}{4}=K_1$

$\lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{\sin z}{z^2(z+2i)}=\frac{\sin(2i)}{-4(4i)}=K_2$

ریشه‌های مخرج = تعداد مانده

$\lim_{z\to -2i}(z+2i)f(z)=\lim\frac{\sin z}{z^2(z-2i)}=\frac{\sin(-2i)}{-4(-4i)}=K_3$

$I=2\pi i\left(\frac{1}{4}+\frac{\sin(2i)}{-16i}+\frac{-\sin(2i)}{16i}\right)=\dots$

نکته: اگر z_0 قطب ساده تابع $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ باشد (p و q چند جمله‌ای فرض شوند) آنگاه

$\underset{z=z_0}{\text{Res}}(f(z))=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

فرض می‌کنیم z_0 تکین تنهای $f(z)$ باشد در این صورت z_0 قطب مرتبه K برای $f(z)$ است اگر و تنها اگر تابع تحلیلی $\varphi(z)$ یافت شود به طوری که:

$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^K}$

$\varphi(z_0)\neq 0$

در این حالت رابطه زیر برقرار است:

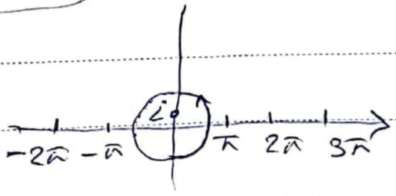
$\text{Res}(f(z))=\frac{\varphi^{(K-1)}(z_0)}{(K-1)!}$

$=\frac{1}{(K-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{K-1}}{dz^{K-1}}\left[(z-z_0)^K f(z)\right]$

مثال: $I=\oint_{|z|=1.2}\frac{z\cos z\,dz}{(\sin^2 z)(z-i)^2}=2\pi i\Big(\underset{z=0}{\text{Res}}(f(z))+\underset{z=i}{\text{Res}}(f(z))\Big)$

$z=0$ قطب مرتبه دوم است

$z=i$ قطب ساده است



Subject
Date

$(\sin z)^2 = (z - \frac{z^3}{3!} + \ldots)^2 = z^2(1 + \ldots)$ ساده است

$K_1 = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2 \cos z}{(\sin^2 z)(z-i)^2} = -1$

$K_2 = \frac{1}{1!} \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to i}\left(\frac{z\cos z}{\sin^2 z}\right)'$

$= \lim_{z\to i} \frac{(\cos z - z\sin z)\sin^2 z - (2\sin z\cos z) z\cos z}{\sin^4 z} = \ldots \pi i(-1+k_2)$

$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$ برای حل چنین انتگرالی از تغییر متغیر

$z = e^{i\theta}$ $0 < \theta < 2\pi$ استفاده می‌کنیم

$\Rightarrow |z| = 1$ و $dz = i e^{i\theta} d\theta$

$\Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$

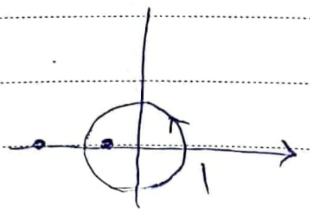
$\sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = \frac{z^n - z^{-n}}{2i} = \frac{z^{2n} - 1}{2i z^n}$

$\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = \frac{z^n + z^{-n}}{2} = \frac{z^{2n} + 1}{2z^n}$

مثال: $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} + \cos\theta}$

$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2} + \frac{z^2+1}{2z}} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2\sqrt{2}z + 1}$

اگر $z^2 + 2\sqrt{2}z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-4}}{2} = -\sqrt{2} \pm 1$



$z = -\sqrt{2}+1$ داخل دایره است
قطب ساده است

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

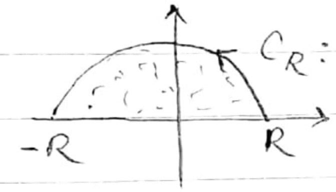
$$I = \frac{2}{2} \cdot 2\pi i \cdot \underset{z=-\sqrt{2}+1}{\operatorname{Res}}\left(\frac{1}{z^2+2\sqrt{2}z+1}\right)$$

$$= 4\pi \cdot \frac{1}{2z+2\sqrt{2}}\Big|_{z=-\sqrt{2}+1} = 2\pi$$

1) $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای فرض می‌شوند

2) مخرج کسر فاقد ریشه حقیقی است

3) درجه $q(x)$ حداقل 2 تا از درجه $p(x)$ بیشتر است



$C_R: z = Re^{i\theta}$

$0 \le \theta \le \pi$

تحت شرایط فوق رابطه زیر برقرار است: $C = [-R, R] \cup C_R$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}\right)$$ کلیه قطب‌های بالای محور افقی

اثبات: $\int_{-R}^{R} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{p(Re^{i\theta})}{q(Re^{i\theta})} \cdot Rie^{i\theta}\,d\theta = \oint_C \frac{p(z)}{q(z)}\,dz =$ رابطه بالا

مثال: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-2x+2)(x^2+4)}$

$$f(z) = \frac{z^2+1}{(z^2-2z+2)(z^2+4)} \qquad z^2+4=0 \ \text{یا}\ z^2-2z+2=0$$

$z=1+i$ و $z=+2i$ قطب‌های بالای محورند و هر دو ساده‌اند

$$I = 2\pi i\Big(\overbrace{\underset{z=+2i}{\operatorname{Res}}(f(z))}^{R_1} + \overbrace{\underset{z=1+i}{\operatorname{Res}}(f(z))}^{R_2}\Big)$$

$$\frac{p(z)}{q'(z)} = \frac{z^2+1}{(2z-2)(z^2+4)+2z(z^2-2z+2)}$$

$$K_1 = \frac{p(2i)}{q'(2i)} = \frac{4i^2+1}{0+4i(4i^2-4i+2)} = \frac{-3}{4i(-2-4i)}$$

Sahand

$4i(4i^2-4i+2)$
$4i(2i^2-2i+1)$
$-2-2i$

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

$K_2 = \frac{P(1+i)}{q'(1+i)} = \frac{(1+i)^2+1}{(2(1+i)-2)((1+i)^2+4)+0} = \frac{1+i^2+2i+1}{2i(1+i^2+2i+4)} = \frac{2i+1}{2i(4+2i)}$

$\Rightarrow I = 2\pi i\left(\frac{-3}{4i(-2-4i)} + \frac{2i+1}{2i(4+2i)}\right) = \pi \cdot \frac{-12-6i+(2i+1)(-2-4i)\times 2}{(-2-4i)(4+2i)}$

$I = \pi \cdot \frac{-22i}{40i} = \frac{-22}{4}\pi$ باید عدد حقیقی است بیاید

مثال: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2-2x+2)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1+i}(f(z))$ $f(z) = \frac{2z+1}{(z^2-2z+2)^2}$

$z = \frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = \frac{2\pm 2i}{2} = 1\pm i$ $z=1+i$ قطب مرتبه دو و بالای محور است

$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{1!} \lim_{z\to 1+i} \left((z-(1+i))^2 f(z)\right)' = 2\pi i \cdot \frac{4i - 2(2(1+i)+1)}{(2i)^3} = 2\pi i \frac{-6}{-8i} = \frac{12}{8}\pi$

$\left(\frac{2z+1}{(z-(1-i))^2}\right)' = \frac{2(z-1+i)^2 - 2(z-1+i)(2z+1)}{(z-1+i)^4}$

$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(mx)\,dx$ شرایط قبلی را دارند

$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(mx)\,dx$ $I_1 + iI_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{imx}\,dx$

با فرض $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} e^{imz}$

$I_1 = \operatorname{Re}\left[2\pi i \sum \operatorname{Res}(f(z))\right]$ $I_2 = \operatorname{Im}\left[2\pi i \sum \operatorname{Res}(f(z))\right]$

هر دو مجموع روی کلیه قطب های بالای محور افقی است

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال: $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos(3x)\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}$ ———

با فرض $f(z) = \frac{e^{3iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}$ ، $z=+i$ و $z=+2i$ نقطه‌های بالا محور افقی می‌باشند و هر دو ساده هستند

$I = \frac{1}{2} Re[2\pi i (\underset{z=+i}{Res}(f(z)) + \underset{z=+2i}{Re}(f(z))) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \left(\frac{e^{-3}}{6} - \frac{e^{-6}}{6}\right)$

$R_1 = \left.\frac{e^{3iz}}{2z(z^2+4)+2z(z^2+1)}\right|_{z=i} = \frac{e^{-3}}{6i} \quad = \frac{\pi}{6}(e^{-3} - e^{-6})$

$R_2 = \left.\frac{e^{3iz}}{2z(z^2+4)+2z(z^2+1)}\right|_{z=2i} = \frac{e^{-6}}{-6i}$

تمرین: $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{(x^2+x+1)^2}$ $\qquad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{x\sin x\,dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$

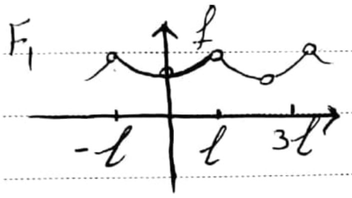
$I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+\cos\theta+\sin\theta}$ $\qquad I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\,dx}{(x^2-2x+2)^3}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

فرض کنید f روی بازه $(0, l)$ تعریف شده و پیوسته است F_1 به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} F_1(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < l \\ f(-x) & -l < x < 0 \end{cases} \\ F_1(x+2l) = F_1(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



F_1 گسترش زوج f نامیده می‌شود.

پیوسته یا قطعه‌ای و مشتق‌پذیر می‌باشد

$$F_1 \text{ سری فوریه } = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{2l} x\right) = f(x) \qquad x \in (0, l)$$

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} F_1(x)\,dx = \frac{2}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{2l}\int_{-l}^{l} F_1(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{2l}x\right)dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

بنابراین:

سری فوریه کسینوسی f: $f(x) = a_0 + \sum a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad x \in (0, l)$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$(n = 1, 2, \dots)$

به طور مشابه از گسترش فرد f بدست می‌آید:

سری فوریه سینوسی f: $f(x) = \sum b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \qquad x \in (0, l)$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \qquad n = 1, 2, \dots$$

Subject

Date

مثال: سری‌های فوریه سینوسی و کسینوسی تابع f را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x\leq 1\\ x^2 & 1<x<2\end{cases}$$

سری فوریه سینوسی:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \quad x\in(0,2)$$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx=\int_0^1 \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx+\int_1^2 x^2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)dx$$

$$b_n=\frac{-2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_0^1$$

$$+\left[-\frac{2x^2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)+\frac{8x}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)+\frac{16}{n^2\pi^3}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{2}{n\pi}\right.$$

$$+\left[\left(-\frac{8}{n\pi}\cos(n\pi)+\frac{16}{n^2\pi^2}\sin(\pi n)+\frac{16}{\pi^3n^3}\cos(n\pi)\right)\right.$$

$$\left.-\left(-\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{16}{n^3\pi^3}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right]=\ldots=b_n$$

$$x^2 \quad + \quad \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$
$$2x \quad - \quad \frac{-2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$
$$2 \quad + \quad \frac{-4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$
$$0 \quad \frac{8}{n^3\pi^3}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \quad x\in(0,2)$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 1\,dx+\int_1^2 x^2dx\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{7}{3}\right)=\frac{10}{6}$$

$$a_n=\frac{2}{2}\left(\int_0^1 1\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx+\int_1^2 x^2\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx\right)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

اگر f دارای دوره تناوب $T = 2\pi$ بوده و پیوسته قطعه‌ای باشد آنگاه: (در L)

$$f = \text{سری فوریه} = a_0 + \sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

داریم:

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

$$\Rightarrow f \text{ سری فوریه } = a_0 + \sum a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \ldots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

فرم مختلط سری فوریه f

که در آن:

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

مثال: فرم مختلط سری فوریه f را بیابید.

$$\begin{cases} f(x) = e^{-3x} & |x| < \pi \\ f(x+2\pi) = f(x) & x \in R \end{cases}$$

$$f(x) = e^{-3x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \quad |x| < \pi$$

که در آن: $C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-3x} \cdot e^{-inx}\,dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(3+ni)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-1}{3+ni} e^{-(3+ni)x}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-1}{3+ni}\left[e^{(-3-ni)\pi} - e^{(3+ni)\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-1}{3+ni}\left[e^{-3\pi} \cdot e^{-n\pi i} - e^{3\pi} \cdot e^{n\pi i}\right]$$

داریم:

$$e^{\pm n\pi i} = \cos(\pm n\pi) + i\sin(\pm n\pi) = (-1)^n$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\frac{-(-1)^n}{3+ni}\left[e^{-3\pi} - e^{3\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{3+ni}\cdot\frac{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}{2} = (-1)^n\cdot\frac{3-ni}{9+n^2}\cdot\frac{\sinh \pi}{\pi}$$

انتگرال فوریه:

فرض کنید تابع f در هر بازه محدود پیوسته قطعه‌ای بوده و بر روی R مطلقاً انتگرال پذیر باشد (یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<\infty$) در این صورت انتگرال فوریه f به شکل زیر است:

$$f \text{ انتگرال فوریه } = \int_0^\infty \left[A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx)\right] dw$$

که در آن:

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(wx)\,dx$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(wx)\,dx$$

- اگر در هر نقطه مشتق چپ و مشتق راست f موجود باشد آنگاه مقدار انتگرال فوریه f مساوی $f(x)$ است بجز نقاط ناپیوستگی

اگر تابع f در نقطه x_0 ناپیوسته باشد آنگاه مقدار انتگرال فوریه به ازای x_0 برابر است با میانگین حد چپ و حد راست f در این نقطه

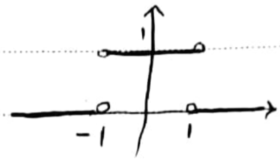
$$\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$$

انتگرال فوریه f در صورت وجود منحصر به فرد است

PAPCO

مثال: انتگرال فوریه زیر را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}1\,dx=2<\infty$$ ، f زوج است $\Rightarrow B(\omega)=0$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}1\cos(\omega x)dx=\frac{2}{\pi}\cdot\int_{0}^{1}\cos(\omega x)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega}{\omega}$$

انتگرال فوریه f $=\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}\cdot\cos(\omega x)d\omega$

نتیجه:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\cos(\omega x)}{\omega}d\omega=\begin{cases}1, & |x|<1\\ \frac{1}{2}\ (\text{میانگین}) & |x|=1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\cos(\omega x)}{\omega}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & |x|<1\\ \frac{\pi}{4} & |x|=1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

به ازای $x=0$ داریم:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

انتگرال فوریه کسینوسی و انتگرال فوریه سینوسی:

فرض کنید تابع f در هر بازه $(0,a)$ پیوسته قطعه‌ای بوده و بر روی $\mathbb{R}^{+}$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد (یعنی $\int_0^{\infty}|f(x)|dx<\infty$) دو نوع گسترش برای f می‌توان در نظر گرفت زوج و فرد

Subject
Date

بنابراین دو مدل انتگرال فوریه بدست می آید:

$f_{\text{انتگرال فوریه کسینوسی}} = \int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega$

$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)\,dx$

$f_{\text{انتگرال فوریه سینوسی}} = \int_0^\infty B(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega$

$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)\,dx$

$\mathcal{L}(f(x)) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = F(s)$

$\mathcal{L}(\cos(ax)) = \frac{s}{s^2+a^2}$

$\mathcal{L}(\sin(ax)) = \frac{a}{s^2+a^2}$

مثال: $f(x) = e^{-kx}$ ، $x>0$ است و $k \in \mathbb{R}^+$ ثابت

$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kx}\cos(\omega x)\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{k}{k^2+\omega^2}$

$f_{\text{انتگرال فوریه کسینوسی}} = \int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{k^2+\omega^2}\,d\omega = e^{-kx} \quad x>0$

$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kx}\sin(\omega x)\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega}{k^2+\omega^2}$

$f_{\text{انتگرال فوریه سینوسی}} = \int_0^\infty B(\omega)\sin(\omega x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\sin(\omega x)}{k^2+\omega^2}\,d\omega = e^{-kx} \quad x>0$

انتگرال فوریه برای جواب ۱ است

نتیجه ①: $\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)\,d\omega}{k^2+\omega^2} = \frac{\pi}{2k}e^{-kx} \quad x>0$

$\int_0^\infty \frac{\omega\sin(\omega x)}{k^2+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2}e^{-kx} \quad x>0$

نتیجه ②: $\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)+\omega\sin(\omega x)}{1+\omega^2}\,d\omega = \begin{cases} \pi e^{-x}, & x>0 \\ \frac{\pi}{2}\ (\text{میانگین}), & x=0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

اگر $x<0 \longrightarrow -x>0$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \quad -\pi<\theta<\pi \quad 0<r<R$$

$u(R,\theta)=f(\theta)$ (1) $u(r,\pi)=u(r,-\pi)$ (2)

$u_\theta(r,\pi)=u_\theta(r,-\pi)$ (3) $u(0,\theta)<\infty$ (4)

حل به روش جداسازی متغیرها :

با فرض $u(r,\theta)=F(r)\cdot G(\theta)$ (5)

$$r\cdot\frac{\partial u}{\partial r}=rF'(r)G(\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=F'(r)G(\theta)+rF''(r)G(\theta)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=F(r)G''(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\left[F'(r)G(\theta)+rF''(r)G(\theta)\right]+\frac{1}{r^2}F(r)G''(\theta)=0$$

$$\left(r^2F''(r)+rF'(r)\right)G(\theta)+F(r)G''(\theta)=0$$

$$-\frac{r^2F''(r)+rF'(r)}{F(r)}=+\frac{G''(\theta)}{G(\theta)}=-\lambda^2$$

$$\begin{cases} G''(\theta)+\lambda^2G(\theta)=0 & \text{خطی مرتبه دوم} \\ r^2F''(r)+rF'(r)-\lambda^2F(r)=0 & \text{کوشی اویلر} \end{cases}$$

$$G(\theta)=C_1\cos(\lambda\theta)+C_2\sin(\lambda\theta) \qquad F(r)=C_3r^{\lambda}+C_4r^{-\lambda}$$

علوی

(b),(2) $\rightarrow G(\pi) = G(-\pi) \Rightarrow c_1 \cos(\lambda\pi) + c_2 \sin(\lambda\pi)$
$= c_1 \cos(-\lambda\pi) + c_2 \sin(-\lambda\pi) \Rightarrow 2c_2 \sin(\lambda\pi) = 0$

(b),(3) $\rightarrow G'(\pi) = G'(-\pi) \Rightarrow -c_1 \lambda \sin(\lambda\pi) + c_2 \lambda \cos(\lambda\pi)$
$= -c_1 \lambda \sin(-\lambda\pi) + c_2 \lambda \cos(-\lambda\pi) \Rightarrow 2c_1 \lambda \sin(\lambda\pi) = 0$

c_1 و c_2 همزمان صفر نمی‌باشند پس باید $\lambda\pi = n\pi$, $\boxed{\lambda = n \quad n \in \mathbb{Z}}$

(b),(4) $\rightarrow F(0) < \infty \rightarrow c_4 = 0$

$$\begin{cases} G_n(\theta) = c_{1,n} \cos(n\theta) + c_{2,n} \sin(n\theta) \\ F_n(r) = c_{3,n} r^n \end{cases}$$

با فرض $c_{1,n} \cdot c_{3,n} = a_n$, $c_{2,n} \cdot c_{3,n} = b_n$

$$u_n(r,\theta) = [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] r^n$$

$$u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] r^n$$

تعیین a_n و b_n و a_0: از شرط (1) نتیجه می‌گیریم:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [R^n a_n \cos(n\theta) + R^n b_n \sin(n\theta)] = f(\theta)$$

سمت چپ سری فوریه تابع f است پس:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta \qquad R^n \cdot a_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta$$

$$R^n \cdot b_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta$$

۰۲۱-۶۶۴۲۶

فرم کلی معادلات مرتبه دوم

$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=F(x,y,u,u_x,u_y)$

فرض: $\Delta = AC-B^2 \longrightarrow \Delta<0 \quad \Delta=0 \quad \Delta>0$

مثال: $u_{xx}+u_{yy}=0 \longrightarrow \Delta=1>0$ بیضی گون

$u_{tt}-c^2u_{xx}=0 \longrightarrow \Delta=-c^2<0$ هذلولی گون

$c^2u_{xx}=u_t \longrightarrow \Delta=0$ سهمی گون

معادله مشخصه به صورت روبه‌رو است $A(y')^2-2By'+C=0$ مرتبه اول درجه دوم است

اگر $\Delta<0$ آنگاه دو منحنی به صورت $\varphi(x,y)=c_1$ و $\psi(x,y)=c_2$ جواب‌های معادله فوق باشند

آنگاه می‌توان تغییر متغیر $z=\varphi(x,y)$ و $v=\psi(x,y)$ را بکار برد

اگر $\Delta=0$ آنگاه به صورت $\varphi(x,y)=c_1$ تنها جواب معادله باشد می‌توان تغییر متغیر

$z=\varphi(x,y)$ و $v=x$ را بکار برد

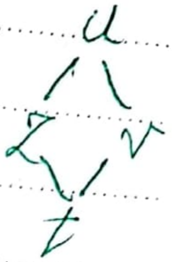
مثال: جواب معادله دالامبر معادله موج را بیابید

$z=x-ct$

$v=x+ct$

علوی

$u_t = u_z \cdot z_t + u_v \cdot v_t = -c\,u_z + c\,u_v$

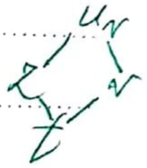


$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} u_t = -c\frac{\partial}{\partial t} u_z + c\frac{\partial}{\partial t} u_v$

$= -c\left[u_{zz}\cdot z_t + u_{zv}\cdot v_t\right] + c\left[u_{vz}\cdot z_t + u_{vv}\cdot v_t\right]$

$= -c\left[-c\,u_{zz} + c\,u_{zv}\right] + c\left[-c\,u_{vz} + c\,u_{vv}\right]$

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{zz} - 2c^2 u_{zv} + c^2 u_{vv}}$$



$u_x = u_z \cdot z_x + u_v \cdot v_x = u_z + u_v$

$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} u_x = \frac{\partial}{\partial x}(u_z + u_v) = \frac{\partial}{\partial x}u_z + \frac{\partial}{\partial x}u_v$

$= (u_{zz}\cdot z_x + u_{zv}\cdot v_x) + (u_{vz}\cdot z_x + u_{vv}\cdot v_x)$

$$\boxed{u_{xx} = u_{zz} + 2u_{zv} + u_{vv}}$$

بنابراین:

$c^2 u_{zz} - 2c^2 u_{zv} + c^2 u_{vv} = c^2(u_{zz} + 2u_{zv} + u_{vv})$

$4c^2 u_{zv} = 0 \Rightarrow u_{zv} = 0 \xrightarrow[\text{نسبت به } v]{\text{انتگرال}} u_z = h(z)$

$\Rightarrow u = H(z) + G(v)$

انتگرال نسبت به z $\rightarrow u = \int h(z)\,dz + G(v)$

۰۲۱-۶۴۲۶

Alavi

$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = H(x-ct) + G(x+ct)}$

جواب دالامبر معادله موج

Alavi

۰۲۱-۶۴۲۶

مثال: با تغییر متغیر داده شده حل کنید

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0$$

$$v = x + y \quad , \quad z = 2x - y$$

$$u_x = u_z \cdot z_x + u_v \cdot v_x = 2u_z + u_v$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(2u_z + u_v) = 2[u_{zz} \cdot z_x + u_{zv} \cdot v_x] + [u_{vz} \cdot z_x + u_{vv} \cdot v_x]$$

$$\boxed{u_{xx} = 4u_{zz} + 4u_{zv} + u_{vv}}$$

$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2u_z + u_v) = 2[u_{zz} \cdot z_y + u_{zv} \cdot v_y] + [u_{vz} \cdot z_y + u_{vv} \cdot v_y]$$

$$\boxed{u_{xy} = -2u_{zz} + u_{zv} + u_{vv}}$$

$$u_y = u_z \cdot z_y + u_v \cdot v_y = -u_z + u_v$$

$$u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}[-u_z + u_v]$$

$$= -[u_{zz} \cdot z_y + u_{zv} \cdot v_y] + [u_{vz} \cdot z_y + u_{vv} \cdot v_y]$$

$$\boxed{u_{yy} = u_{zz} - 2u_{zv} + u_{vv}}$$

بنابراین:

$$[4u_{zz} + 4u_{zv} + u_{vv}] + [-2u_{zz} + u_{zv} + u_{vv}] - 2[u_{zz} - 2u_{zv} + u_{vv}] = 0$$

علوی

Scanned by CamScanner

علوی

$9u_{zv}=0 \Rightarrow u_{zv}=0$

$u=H(z)+G(v) \Rightarrow \boxed{u(x,y)=H(2x-y)+G(x+y)}$

معادلات ناهمگن (مستقل از زمان و وابسته به زمان)

$u_{tt}=c^2u_{xx}+\mathcal{L}(x,t) \quad 0<x<l \quad t\geq 0$

$u(0,t)=A$

$u(l,t)=B$

$u(x,0)=f(x) \quad u_t(x,0)=g(x)$

با استفاده از تغییر متغیر $u(x,t)=v(x,t)+r(x)$ ضابطه r را طوری تعیین می‌کنیم که تبدیل یافته معادله بر حسب متغیر v معادله‌ای همگن و با شرایط همگن باشد

$v_{tt}+0=c^2\left[v_{xx}+r''(x)\right]+\mathcal{L}(x)$

لازمه همگن شدن معادله: $c^2r''(x)+\mathcal{L}(x)=0$

$u(0,t)=r(0)=A$, $r(0)=A$ $\Big\}$ $r(x)=\ldots$

$u(l,t)=r(l) \Rightarrow r(l)=B$

اگر $v(0,t)=0 \Rightarrow u(0,t)=r(0)$

اگر $v(l,t)=0 \Rightarrow u(l,t)=r(l)$

Scanned by CamScanner

Alavi   ۰۲۱-۶۴۲۶

$v_t = c^2 v_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$

$v(0,t) = v(l,t) = 0$

$v(x,0) = u(x,0) - r(x) = f(x) - r(x)$ ⇐ $v(x,t) =$ —

$v_t(x,0) = u_t(x,0) = g(x)$

اگر فقط سوال گفته بود همگن کنید نیازی به حل نیست

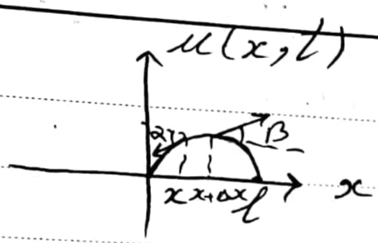
با تغییر متغیر مناسب معادله ناهمگن داده شده را به معادله همگن با شرایط همگن تبدیل کنید

$u(x,t) = v(x,t) + r(x)$ تغییر متغیر

Scanned by CamScanner

Subject
Date

معادله موج (یک بعدی و همگن)



قطعه سیم با طول L و با چگالی جرم یکنواخت ρ تحت نیروی کشش و ثابت T قرار دارد. $u(x,t)$ = مکان نقطه با طول x در لحظه t

شرایط مرزی همگن $u(0,t)=u(l,t)=0 \quad \forall t$

حالت اولیه $u(x,0)=f(x)$ سرعت اولیه $\frac{\partial f}{\partial u}(x,0)=g(x)$

$$T_1\cos\alpha = T_2\cos\beta = T$$

$$T_2\sin\beta - T_1\sin\alpha = F = ma \approx \rho\Delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t^2}$$

$$\tan\beta - \tan\alpha \approx \frac{\rho}{T}\cdot\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \approx \frac{\rho}{T}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

با میل دادن Δx به صفر نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \frac{\rho}{T} = \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0<x<l,\ t>0$$

$u(0,t)=u(l,t)=0$ (1)

$u(x,0)=f(x)$ (2)

$u_t(x,0)=g(x)$ (3)

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$

Subject
Date

حل با روش جداسازی متغیرها:

با فرض $u(x,t)=F(x)G(t)$ ④ $\Rightarrow F(x)G''(t)=c^2F''(x)G(t)$

$$\frac{G''(t)}{c^2G(t)}=\frac{F''(x)}{F(x)}=\text{مقدار ثابت}=K$$

اگر ① $K=+\lambda^2>0 \Rightarrow F''(x)-\lambda^2F(x)=0$ (همگن مرتبه دوم) $m^2-\lambda^2=0 \rightarrow m=\pm\lambda$ (متمایز)

$F(x)=C_1\cosh(\lambda x)+C_2\sinh(\lambda x)$

① و ④ $\Rightarrow F(0)=0 \rightarrow C_1=0$, $F(l)=0$ $\Big\} \Rightarrow C_2\sinh(\lambda x)=0$
$\rightarrow C_2=0 \rightarrow F=0 \rightarrow u=0$ ⊛

اگر ② $K=0 \rightarrow F''(x)=0 \rightarrow F(x)=C_1x+C_2$

① و ④ $\Rightarrow F(0)=0 \Rightarrow C_2=0$
$F(l)=0 \Rightarrow C_1l=0$
$\Rightarrow C_1=0 \Rightarrow F=0 \Rightarrow u=0$ ⊛

بنابراین باید $K=-\lambda^2<0$ باشد) می‌توانیم در امتحان ننویسیم

$$\begin{cases} F''(x)+\lambda^2F(x)=0 & m^2+\lambda^2=0 \rightarrow m=\pm\lambda i \\ G''(t)+c^2\lambda^2G(t)=0 & m^2+c^2\lambda^2=0 \rightarrow m=\pm c\lambda i \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x)=C_1\cos(\lambda x)+C_2\sin(\lambda x) \\ G(t)=C_3\cos(c\lambda t)+C_4\sin(c\lambda t) \end{cases}$$

①, ④ $\Rightarrow F(0)=0 \Rightarrow C_1=0$, $F(l)=0$ $\Big\} \Rightarrow C_2\sin(\lambda l)=0$

$C_2\neq 0 \rightarrow \sin(\lambda l)=0 \Rightarrow \lambda l=n\pi \rightarrow \boxed{\lambda=\frac{n\pi}{l} \quad n\in\mathbb{Z}-\{0\}}$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$\begin{cases} F_n(x) = C_{2,n} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \\ G_n(t) = C_{2,n} \cos\left(\frac{Cn\pi}{l} t\right) + C_{4,n} \sin\left(\frac{Cn\pi}{l} t\right) \end{cases}$$

با فرض:

$$C_{2,n} \cdot C_{3,n} = a_n \quad , \quad C_{2,n} \cdot C_{4,n} = b_n$$

خواهیم داشت:

$$u_n(x,t) = \left[a_n \cos\left(\frac{Cn\pi}{l} t\right) + b_n \sin\left(\frac{Cn\pi}{l} t\right)\right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{Cn\pi}{l} t\right) + b_n \sin\left(\frac{Cn\pi}{l} t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

جواب

② $\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = f(x)}_{\text{سری فوریه سینوسی تابع } f}$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx \qquad n = 1, 2, \dots$$

③ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Cn\pi}{l} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = g(x)$

$$\frac{Cn\pi}{l} b_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{Cn\pi} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx \qquad n = 1, 2, \dots$$

مثال:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < \pi \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \quad ① \\ u(x,0) = 3\sin x - 7\sin(8x) \quad ② \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = F(x)G(t) \Rightarrow F(x)G''(t) = 16 F''(x) G(t)$$

$$\frac{G''(t)}{16 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda^2$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$\begin{cases} F''(x)+\lambda^2 F(x)=0 & m^2+\lambda^2=0 \quad m=\pm\lambda i \\ G''(t)+16\lambda^2 G(t)=0 & m^2+16\lambda^2=0 \rightarrow m=\pm 4\lambda i \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x)=c_1\cos(\lambda x)+c_2\sin(\lambda x) \\ G(t)=c_3\cos(4\lambda t)+c_4\sin(4\lambda t) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} F(0)=0 \rightarrow c_1=0 \\ F(\pi)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c_2\sin(\lambda\pi)=0$$

$$\xrightarrow{c_2\neq 0} \sin(\lambda\pi)=0 \rightarrow \lambda\pi=n\pi \rightarrow \boxed{\lambda=n \quad n\in\mathbb{Z}-\{0\}}$$

$F_n(x)=c_{2,n}\sin(nx)$

$G_n(t)=c_{3,n}\cos(4nt)+c_{4,n}\sin(4nt)$

$c_{2,n}\cdot c_{3,n}=a_n \quad , \quad c_{2,n}\cdot c_{4,n}=b_n$

$u_n(x,t)=[a_n\cos(4nt)+b_n\sin(4nt)]\cdot\sin(nx)$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(4nt)+b_n\sin(4nt)]\sin(nx)$$

② $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin(nx)=3\sin x-7\sin(8x)$ تعیین a_n و b_n:

$a_1\sin x+a_n\sin(2x)+\dots=3\sin x-7\sin(8x)$

$a_1=3 \; , \; a_8=-7 \; , \; a_n=0 \; , \; n\neq 1 \; , \; n\neq 8$

③ $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} 4nb_n\sin(nx)=0 \quad 4nb_n=0 \;\; \forall n \Rightarrow \boxed{b_n=0 \;\; \forall n}$

$$\boxed{u(x,t)=3\cos(4t)\sin x-7\cos(32t)\sin(8x)}$$ جواب نهایی

PAPCO

Scanned by CamScanner

Date

حل
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<\pi \quad t>0 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 5\cos(2x) - 3 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$F(x)G''(t) = 16F''(x)G(t) \qquad \frac{G''(t)}{16G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda^2$$

$$\begin{cases} F''(x) + \lambda^2 F(x) = 0 & m^2 + \lambda^2 = 0 \to m = \pm\lambda i \\ G''(t) + 16\lambda^2 G(t) = 0 & m^2 + 16\lambda^2 = 0 \quad m = \pm 4\lambda i \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x) = C_1\cos(\lambda x) + C_2\sin(\lambda x) \\ G(t) = C_3\cos(4\lambda t) + C_4\sin(4\lambda t) \end{cases} \Rightarrow F'(x) = -C_1\lambda\sin(\lambda x) + C_2\lambda\cos(\lambda x)$$

$$\left.\begin{array}{l} F'(0) = 0 \to C_2\lambda = 0 \to C_2 = 0 \;\text{یا}\; \lambda = 0 \\ F'(\pi) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -C_1\lambda\sin(\lambda\pi) = 0$$

$\to$ $C_1 = 0$ (غ ق ق) یا $\lambda = 0$ یا $\sin(\lambda\pi) = 0$

$$\boxed{\lambda = n \qquad n \in \mathbb{Z}}$$

$$F_n(x) = C_{1,n}\cos(nx)$$
$$G_n(t) = C_{3,n}\cos(4nt) + C_{4,n}\sin(4nt)$$
$$C_{1,n}C_{3,n} = a_n \quad , \quad C_{1,n}\cdot C_{4,n} = b_n$$
$$u(x,t) = a_0 + \sum [a_n\cos(4nt) + b_n\sin(4nt)]\cdot\cos(nx)$$

(۲) $\Rightarrow a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n\cos(nx) = 5\cos(2x) - 3$

سری فوریه کسینوسی تابع سمت راست

$$a_0 = -3 \quad a_2 = 5 \quad a_n = 0 \quad n \neq 0, n \neq 2$$

(۳) $\to b_n = 0 \quad \forall n$

$$u(x,t) = -3 + 5\cos(8t)\cos(2x)$$ جواب نهایی

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

گرما

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & 0<x<l \quad t>0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & ① \\ u(x,0) = f(x) & ② \end{cases}$$

حل:

با فرض $u(x,t) = F(x)\,G(t)$ ③

$F(x)G'(t) = c^2 F''(x) G(t)$

$$\frac{G'(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda^2 \qquad \begin{cases} F''(x) + \lambda^2 F(x) = 0 \\ G'(t) + c^2\lambda^2 G(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) \\ G(t) = C_3 e^{-c^2\lambda^2 t} \end{cases}$$

③,① $\Rightarrow$ $F(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$, $F(l) = 0$ $\Big\}$ $\Rightarrow C_2 \sin(\lambda l) = 0$

$C_2 \neq 0 \longrightarrow \sin(\lambda l) = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi$ $\qquad \boxed{\lambda = \frac{n\pi}{l} \quad n \in \mathbb{Z} - \{0\}}$

$F_n(x) = C_{2,n} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad G_n(t) = C_{3,n}\, e^{-\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 t}$

با فرض $A_n = C_{2,n} \cdot C_{3,n} \Rightarrow u(x,t) = \sum A_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ جواب

② $\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}_{\text{سری فوریه سینوسی تابع } f} = f(x)$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

تمرین:

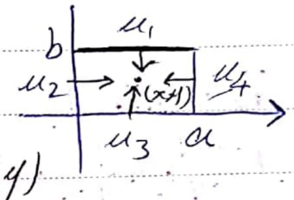
$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} & 0<x<1,\ t>0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \\ u(x,0)=\begin{cases} x & 0<x<\frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2}<x<1 \end{cases} \end{cases}$$

جواب:

$$A_n = \frac{2}{1}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} x\sin(n\pi x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x)\sin(n\pi x)\,dx\right]$$

پتانسیل:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<a,\ 0<y<b \\ u(0,y)=u(a,y)=u(x,0)=0 & (1) \\ u(x,b)=f(x) & (2) \end{cases}$$



$u(x,y)=$ دمای نقطه (x,y) مستقل از زمان

با فرض $u(x,y)=F(x)G(y)$ (3) $\Rightarrow F''(x)G(y)+F(x)G''(y)=0$

$$-\frac{G''(y)}{G(y)}=+\frac{F''(x)}{F(x)}=-\lambda^2$$

$$\begin{cases} F''(x)+\lambda^2F(x)=0 \\ G''(y)-\lambda^2G(y)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F(x)=C_1\cos(\lambda x)+C_2\sin(\lambda x) \\ G(y)=C_3\cosh(\lambda y)+C_4\sinh(\lambda y) \end{cases}$$

(1),(3) $\Rightarrow$ $F(0)=0 \to C_1=0$, $F(a)=0$ $\Rightarrow C_2\sin(\lambda a)=0$, $C_2\neq 0 \Rightarrow \sin(\lambda a)=0$, $\lambda a=n\pi$

$G(0)=0 \Rightarrow C_3=0$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{n\pi}{a} \quad n\in\mathbb{Z}-\{0\}}$$

$$\begin{cases} F_n(x)=C_{2,n}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \\ G_n(y)=C_{4,n}\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \end{cases}$$

با فرض $C_{2,n}\cdot C_{4,n}=a_n$

$$\boxed{u(x,y)=\sum a_n\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

تعیین a_n :

② $\rightarrow \sum_{1}^{\infty} \left(a_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = f(x)$

$\Rightarrow a_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$

$\Rightarrow a_n = \frac{2}{a}\operatorname{csch}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$

$n = 1, 2, \ldots$

تمرین : نشان دهید تبدیل یافته معادله $u_{xx} + u_{yy} = 0$ با استفاده از متغیر $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ به صورت زیر :

$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$

معادله دیریکله :

$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$

$-\pi \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq r \leq R$

$u(R,\theta) = f(\theta) \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$

$u(\pi, r) = u(-\pi, r)$

$u_\theta(\pi, r) = u_\theta(-\pi, r)$

$u(0, \theta) < \infty$

(تبدیلات لاپلاس وارد شود)

Scanned by CamScanner

Subject

Date

تبدیل فوریه کسینوسی و سینوسی:

تعریف
$$\begin{cases} F_C(f(x)) = \hat{f}_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)\,dx \\ F_S(f(x)) = \hat{f}_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)\,dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_C^{-1}(\hat{f}_C(\omega)) = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_C(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega \\ F_S^{-1}(\hat{f}_S(\omega)) = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_S(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega \end{cases}$$

اگر انتگرال های فوریه سینوسی و کسینوسی توابع $f(x)$ و $f'(x)$ موجود بوده و $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ آنگاه:

$$\begin{cases} F_C(f'(x)) = \omega F_S(f(x)) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f(0) \\ F_S(f'(x)) = -\omega F_C(f(x)) \end{cases}$$

اگر انتگرال های فوریه سینوسی و کسینوسی تابع $f'(x)$ نیز موجود بوده و $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$ آنگاه:

$$\begin{cases} F_C(f''(x)) = -\omega^2 F_C(f(x)) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f'(0) \\ F_S(f''(x)) = -\omega^2 F_S(f(x)) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f(0)\,\omega \end{cases}$$

نتیجه: اگر انتگرال های فوریه سینوسی و کسینوسی توابع $u(x,t)$ و $u_x(x,t)$ و $u_{xx}(x,t)$ نسبت به پارامتر x موجود بوده و $\lim_{x\to\infty} u(x,t)=0$ و $\lim_{x\to\infty} u_x(x,t)=0$ آنگاه:

$F_C(u(x,t)) = \hat{u}_C(\omega,t)$

$F_S(u(x,t)) = \hat{u}_S(\omega,t)$

$F_C^{-1}(\hat{u}_C(\omega,t)) = u(x,t)$

$F_S^{-1}(\hat{u}_S(\omega,t)) = u(x,t)$

$F_C(u_x) = \omega F_S(u) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, u(0,t)$

$F_S(u_x) = -\omega F_C(u)$

$F_S(u_{xx}) = -\omega^2 F_S(u) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, u(0,t)\,\omega$

$F_C(u_{xx}) = -\omega^2 \hat{u}_C(\omega,t) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, u_x(0,t)$

$F_C(u_t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_C(\omega,t)$

$F_S(u_t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_S(\omega,t)$

$F_C(u_{tt}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}_C(\omega,t)$

$F_S(u_{tt}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}_S(\omega,t)$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال: با تبدیل فوریه مناسب حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + 3e^{-x} & x>0,\ t>0 \\ u(0,t) = 2 \\ u(x,0) = e^{-3x} \\ u_t(x,0) = \begin{cases} 1 & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_s(u_{tt}) = 4F_s(u_{xx}) + F_s(3e^{-x}) \\ F_s(u(x,0)) = \hat{u}_s(\omega,0) = F_s(e^{-3x}) = \text{—} \\ F_s(u_t(x,0)) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_s(\omega,0) = \text{—} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}_s(\omega,t) = 4\left[-\omega^2\hat{u}_s(\omega,t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times 2\omega\right] + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty 3e^{-x}\sin(\omega x)\,dx \\ \hat{u}(\omega,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-3x}\sin(\omega x)\,dx \\ \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_s(\omega,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi 1\sin(\omega x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{-\cos(\omega x)}{\omega}\Big|_0^\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}_s(\omega,t) + 4\omega^2\hat{u}_s(\omega,t) = 8\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{3\omega}{1+\omega^2} \\ \hat{u}_s(\omega,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{9+\omega^2} \quad (1) \\ \frac{\partial}{\partial t}u_s(\omega,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1-\cos(\pi\omega)}{\omega} \quad (2) \end{cases}$$

$$\hat{u}_{s_h}(\omega,t) = C_1\cos(2\omega t) + C_2\sin(2\omega t)$$

جواب خصوصی: $\hat{u}_{s_p}(\omega,t) = A \xrightarrow{\text{جایگزینی در معادله}} 0 + 4\omega^2 A = 8\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{3\omega}{1+\omega^2}$

پس:

$$u_s(\omega,t) = C_1\cos(2\omega t) + C_2\sin(2\omega t) + \frac{8\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{3\omega}{1+\omega^2}}{4\omega^2}$$

$$(1) \Rightarrow C_1 + \frac{8\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{3}{1+\omega^2}}{4\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{9+\omega^2} \Rightarrow C_1 = H_1(\omega) = \text{—}$$

$$(2) \Rightarrow 2\omega C_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1-\cos(\pi\omega)}{\omega} \Rightarrow C_2 = H_2(\omega) = \text{—}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

u_5

تعریف تبدیل فوریه:

$$F(f(x)) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$F^{-1}(\hat{f}(\omega)) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} dx$$

اگر انتگرال های فوریه $f(x)$ و $f'(x)$ موجود بوده و $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ آنگاه:

$$F(f'(x)) = +i\omega F(f(x))$$

و اگر انتگرال فوریه $f''(x)$ نیز موجود بوده و $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = 0$ آنگاه:

$$F(f''(x)) = -\omega^2 F(f(x))$$

نتیجه: اگر انتگرال های فوریه توابع $u(x,t)$ و $u_x(x,t)$ و $u_{xx}(x,t)$ نسبت به پارامتر x

موجود بوده و $\lim_{x \to \pm\infty} u_x(x,t) = 0$ و $\lim_{x \to \pm\infty} u(x,t) = 0$ آنگاه:

$$F(u(x,t)) = \hat{u}(\omega,t)$$

$$F^{-1}(\hat{u}(\omega,t)) = u(x,t)$$

$$F(u_x) = i\omega \hat{u}(\omega,t)$$

$$F(u_{xx}) = -\omega^2 \hat{u}(\omega,t)$$

$$F(u_t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega,t)$$

$$F(u_{tt}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{u}(\omega,t)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

مثال: با تبدیل فوریه مناسب حل کنید.

$$\begin{cases} u_t = 16u_{xx} + (2t-1)e^{-|x|}, \quad x \in R, \quad t>0 \\ u(x,0) = e^{-3|x|} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(u_t) = 16F(u_{xx}) + F\left((2t-1)e^{-|x|}\right) \\ F(u(x,0)) = F\left(e^{-3|x|}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega,t) = -16\omega^2\hat{u}(\omega,t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(2t-1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cdot e^{-i\omega x}\,dx \\ u(\omega,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|x|} \cdot e^{-i\omega x}\,dx \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cdot e^{-i\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x} \cdot e^{-i\omega x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} \cdot e^{-i\omega x}\,dx$$

$$= \frac{1}{1-i\omega} e^{(1-i\omega)x}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{-1}{1+i\omega} e^{-(1+i\omega)x}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{1-i\omega} - 0 + 0 - \frac{-1}{1+i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|x|} e^{-i\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{3x} e^{-i\omega x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-3x} \cdot e^{-i\omega x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3-i\omega} e^{(3-i\omega)x}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{-1}{3+i\omega} e^{-(3+i\omega)x}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{3-i\omega} - 0 + 0 - \frac{-1}{3+i\omega} = \frac{6}{9+\omega^2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega,t) + 16\omega^2\hat{u}(\omega,t) = \frac{2t-1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{1+\omega^2} \\ \hat{u}(\omega,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{6}{9+\omega^2} \quad (1) \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$\hat{u}(w,t)\cdot e^{16w^2t} = \int \frac{2t-1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{1+w^2} \cdot e^{16w^2t}\,dt + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1+w^2} \int (2t-1)\, e^{16w^2t}\,dt + C$$

$$\hat{u}(w,t)\, e^{16w^2t} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+w^2)} \left[\frac{2t-1}{16w^2} - \frac{2}{(16w^2)^2}\right] e^{16w^2t} + C$$

$$① \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{6}{9+w^2} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+w^2)} \left[\frac{-1}{16w^2} - \frac{2}{(16w^2)^2}\right] + C \Rightarrow C = H(w) =$$

$$\hat{u}(w,t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+w^2)} \left[\frac{2t-1}{16w^2} - \frac{2}{(16w^2)^2}\right] + H(w)\, e^{-16w^2t}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = F^{-1}(\hat{u}(w,t))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(w,t)\, e^{iwx}\,dw$$

PAPCO

Scanned by CamScanner